

ITÉRATIONS

Deux niveaux de difficulté/longueur : — Piste bleue : parties 1 et 2. — Piste rouge : tout le devoir.

Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f^n la composée $f \circ \dots \circ f$ (n termes) avec par convention $f^0 = \text{Id}_E$. Les fonctions f^n , n décrivant $\mathbb{N}$, sont appelées les *itérées* de f . Lorsque f est bijective, on peut également noter f^{-n} la composée $f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1 LA PLUS PETITE PARTIE STABLE CONTENANT...

- 1) Soient E un ensemble, $f : E \longrightarrow E$ une application et A une partie de E . On pose $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(A)$.
 - a) Montrer que B contient A et est stable par f .
 - b) Soit C une partie de E stable par f contenant A . Montrer que C contient B .

En d'autres termes, B est la plus petite partie de E (au sens de l'inclusion) stable par f contenant A .
- 2) On note f la fonction $z \longmapsto z^2$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Déterminer la plus petite partie de $\mathbb{C}$ stable par f contenant $\{3, i\}$.
- 3) On note f la fonction $x \longmapsto \frac{x^2 + 3}{4}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et on pose $A = [2, 4]$ et $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(A)$.
 - a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n(A) = [u_n, v_n]$ pour certains réels u_n et v_n pour lesquels $0 \leq u_n \leq v_n$.
 - b) Étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et leurs limites éventuelles.
 - c) En déduire B .

2 LE THÉORÈME DE CANTOR-BERNSTEIN

On souhaite prouver le résultat suivant.

Théorème (Théorème de Cantor-Bernstein) Soient E et F deux ensembles. S'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E , alors E et F sont équipotents.

- 4) Soient E un ensemble et A une partie de E . On suppose qu'il existe une injection f de E dans A . On souhaite montrer qu'il existe une bijection de E sur A . On note pour cela X la plus petite partie de E stable par f contenant $E \setminus A$, puis on pose pour tout $x \in E$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X \\ x & \text{si } x \notin X. \end{cases}$$

Montrer que φ est à valeurs dans A , puis qu'elle est bijective de E sur A .
- 5) En déduire une preuve du théorème de Cantor-Bernstein.
- 6) Montrer que l'application $(A, B) \longmapsto (2A) \cup (2B + 1)$ est injective de $\mathcal{P}(\mathbb{N})^2$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, puis que les ensembles $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})^2$ sont équipotents.
- 7) On note p_n le $n^{\text{ème}}$ nombre premier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5 \dots$.
 - a) Pour toute application $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, on pose $\alpha(f) = \{p_{n+1}^{f(n)+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que α est injective de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
 - b) En déduire que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sont équipotents.

On a vu en cours sans le prouver que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents. Il n'est pas dur d'en tirer, grâce au résultat de la question 6), que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont équipotents. A fortiori, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sont équipotents.

3 ITÉRÉES D'UNE PERMUTATION SUR UN ENSEMBLE FINI

Soient E un ensemble fini non vide et σ une permutation de E . On admet momentanément que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément — oui oui, ce sera démontré bientôt.

- 8) Pour tous $x, y \in E$, on dit que $x \sim y$ si $y = \sigma^k(x)$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.
- Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E .
 - Soit $x \in E$. Montrer que l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^* \mid \sigma^k(x) = x\}$ possède un plus petit élément $n(x)$.
 - Montrer que les éléments $x, \sigma(x), \sigma^2(x), \dots, \sigma^{n(x)-1}(x)$ sont deux à deux distincts pour tout $x \in E$ et que la classe d'équivalence de x pour $\sim$ est l'ensemble $\{x, \sigma(x), \sigma^2(x), \dots, \sigma^{n(x)-1}(x)\}$.
- 9) On note $X_1, \dots, X_r$ les classes d'équivalence distinctes de E pour $\sim$ et $n_1, \dots, n_r$ leurs cardinaux respectifs. Ensuite, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on note σ_i l'application de E dans E définie par $\sigma_i|_{X_i} = \sigma|_{X_i}$ et $\sigma_i|_{E \setminus X_i} = \text{Id}_{E \setminus X_i}$.
- Montrer que $\sigma_i^{n_i} = \text{Id}_E$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, puis que σ_i est une permutation de E .
 - Montrer que $\sigma_i \circ \sigma_j = \sigma_j \circ \sigma_i$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ distincts.
 - Montrer que $\sigma^{n_1 \vee \dots \vee n_r} = \text{Id}_E$, où $n_1 \vee \dots \vee n_r$ désigne le PPCM des entiers $n_1, \dots, n_r$.

4 COMMENT REPRÉSENTER GRAPHIQUEMENT UNE APPLICATION D'UN ENSEMBLE FINI DANS LUI-MÊME ?

Soient E un ensemble fini non vide et $f : E \rightarrow E$ une application.

- 10) a) Justifier l'existence d'un entier $p \in \mathbb{N}$ pour lequel pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$: $f^{k+1}(E) \subsetneq f^k(E)$ et pour tout $k \geq p$: $f^k(E) = f^p(E)$.

L'entier p est clairement unique. On pose $F = f^p(E)$ et $\sigma = f|_F$.

- b) Montrer que σ est une permutation de F et que pour tout $x \in E$, $f^k(x) \in F$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$.

Ces résultats permettent de représenter graphiquement f de façon très éclairante. À l'intérieur de F , f se comporte comme une permutation, donc d'après les résultats de la partie 3, F peut être partitionné en cycles disjoints de la forme :

$$\dots \rightarrow f^k(x) = x \rightarrow f(x) \rightarrow f^2(x) \rightarrow \dots \rightarrow f^{k-1}(x) \rightarrow \dots$$

Les éléments de $E \setminus F$ sont quant à eux aspirés par F en quelques coups d'après c). Globalement, f peut donc être représentée comme une collection de cycles sur lesquels des arbres sont greffés ici ou là. Par exemple, ci-dessous : $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(7) = 6$ et $f(6) = 5$.

